

1 数値の丸め方の基礎

1.1 床関数と天井関数

実数 x に対して, x 以下の整数のうち最大のものを $\lfloor x \rfloor$ と表し, 床関数という。 x 以上の整数のうち最小のものを $\lceil x \rceil$ と表し, 天井関数という。 $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である。

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}, \quad \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$$

床関数 $\lfloor x \rfloor$ は $x-1 < n \leq x$ を満たす整数 n で, 端数の切り捨てを表す。天井関数 $\lceil x \rceil$ は $x \leq n < x+1$ を満たす整数 n で, 端数の切り上げを表す。

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x, \quad x \leq \lceil x \rceil < x+1 \quad (1)$$

床関数・天井関数の性質 床関数 $y = \lfloor x \rfloor$ のグラフを, x 方向に 1, y 方向に 1 だけ平行移動しても, グラフは変化しない。天井関数 $y = \lceil x \rceil$ も同様である。

$$k \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k, \quad \lceil x+k \rceil = \lceil x \rceil + k \quad (2)$$

たとえば $x = 1.23$, $k = 4 \in \mathbb{Z}$ のとき, 上式の左辺と右辺は一致する。

$$\begin{aligned} \lfloor 1.23+4 \rfloor &= \lfloor 5.23 \rfloor = 5, & \lfloor 1.23 \rfloor + 4 &= 1 + 4 = 5 \\ \lceil 1.23+4 \rceil &= \lceil 5.23 \rceil = 6, & \lceil 1.23 \rceil + 4 &= 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

符号を換えると, 床関数と天井関数を相互に変換できる。

$$\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil, \quad \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor \quad (3)$$

たとえば $x = 1.23$ のとき, 上式の左辺と右辺は一致する。

$$\begin{aligned} \lfloor 1.23 \rfloor &= 1, & -\lceil -1.23 \rceil &= -(-1) = 1 \\ \lceil 1.23 \rceil &= 2, & -\lfloor -1.23 \rfloor &= -(-2) = 2 \end{aligned}$$

1.2 切り捨てと切り上げ

実数 x を, それに近接する整数に置き換えることを「丸める」という。切り捨て, 切り上げ, 四捨五入, 五捨五超入, 銀行丸め等の方法がある。どの丸め方でも, 整数 x は, x に丸められ, 変化しない。

$$x \text{ が整数ならば, } x \xrightarrow{\text{丸め}} x$$

正の実数 x を整数部 $\text{Int}(x)$ と小数部 $\text{Frac}(x)$ に分解すると、整数部は $\text{Int}(x) = \lfloor x \rfloor$ 、小数部は $\text{Frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ と表せる。小数部は常に $0 \leq \text{Frac}(x) < 1$ の範囲内にある。

$$x = \text{Int}(x) + \text{Frac}(x), \quad \begin{cases} \text{Int}(x) = \lfloor x \rfloor \\ \text{Frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor \end{cases} \quad (4)$$

切り捨て (round_floor) 小数部が0のときは丸められないので考えなくてよい。小数部を切り捨てて0に置き換えることを切り捨てという。区間 $(0, 1)$ は、 $0 < x < 1$ を満たす実数 x の集まりである。

小数部	切り捨て
$(0.0, 1.0)$	$\rightarrow 0$

切り捨ては床関数 $\lfloor x \rfloor$ で求めることができる。

$$x \xrightarrow{\text{切り捨て}} \lfloor x \rfloor$$

$$3.14 \xrightarrow{\text{切り捨て}} 3, \quad 4.5 \xrightarrow{\text{切り捨て}} 4, \quad 5.71 \xrightarrow{\text{切り捨て}} 5$$

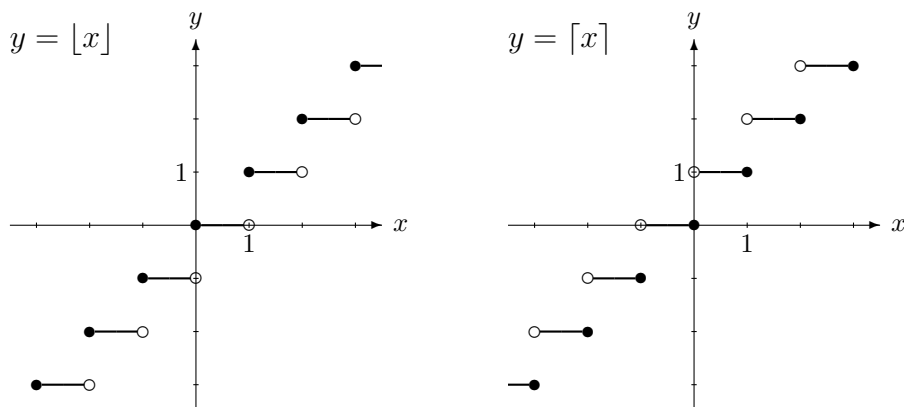
切り上げ (round_ceiling) 小数部が0のときは丸められないので考えなくてよい。小数部が0でないとき、小数部を切り上げて1に置き換える（整数部に1を加える）ことを切り上げという。

小数部	切り上げ
$(0.0, 1.0)$	$\rightarrow 1$

切り上げは天井関数 $\lceil x \rceil$ で求めることができる。

$$x \xrightarrow{\text{切り上げ}} \lceil x \rceil$$

$$3.14 \xrightarrow{\text{切り上げ}} 4, \quad 4.5 \xrightarrow{\text{切り上げ}} 5, \quad 5.71 \xrightarrow{\text{切り上げ}} 6$$



1.3 四捨五入と五捨五超入

四捨五入 小数部が0.5未満なら切り捨てて0に置き換え、小数部が0.5以上なら切り上げて1に置き換える（整数部に1を加える）ことを四捨五入という。区間 $(0, 0.5)$ は、 $0 < x < 0.5$ を満たす実数 x の集まりである。0.5は切り上げられる。

小数部	四捨五入
$(0.0, 0.5)$	$\rightarrow 0$
$[0.5, 1.0)$	$\rightarrow 1$

四捨五入は床関数を用いて $\lfloor x + 0.5 \rfloor$ で求めることができる。

$$x \xrightarrow{\text{四捨五入}} \lfloor x + 0.5 \rfloor$$

$$3.14 \xrightarrow{\text{四捨五入}} 3, \quad 4.5 \xrightarrow{\text{四捨五入}} 5, \quad 5.71 \xrightarrow{\text{四捨五入}} 6$$

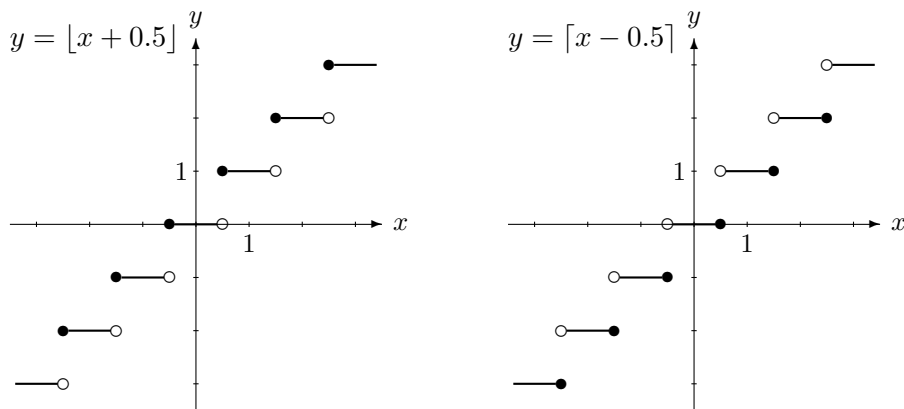
五捨五超入 小数部が0.5以下なら切り捨てて0に置き換え、小数部が0.5を超えるなら切り上げて1に置き換える（整数部に1を加える）ことを五捨五超入という。区間 $(0, 0.5]$ は、 $0 < x \leq 0.5$ を満たす実数 x の集まりである。0.5は切り捨てられる。

小数部	五捨五超入
$(0.0, 0.5]$	$\rightarrow 0$
$(0.5, 1.0)$	$\rightarrow 1$

五捨五超入は天井関数を用いて $\lceil x - 0.5 \rceil$ で求めることができる。

$$x \xrightarrow{\text{五捨五超入}} \lceil x - 0.5 \rceil$$

$$3.14 \xrightarrow{\text{五捨五超入}} 3, \quad 4.5 \xrightarrow{\text{五捨五超入}} 4, \quad 5.71 \xrightarrow{\text{五捨五超入}} 6$$



1.4 銀行丸め

銀行丸め (round_half_even) 銀行丸め (Banker's rounding) は JIS 丸め, ISO 丸めともよばれ, JIS Z 8401:2019 規則 A に定められている。実数 x に銀行丸めを行った結果を $\lfloor x \rfloor$ と表す。

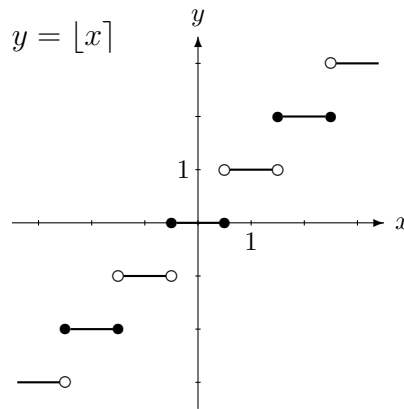
小数部による場合分け 実数 x に対して, x に最も近い整数が 1 つだけある (小数部が 0.5 でない) 場合はその整数に丸め, x に最も近い整数が 2 つある (小数部が 0.5 である) 場合はそれらの整数のうち偶数であるほうに丸める。

$$x \xrightarrow{\text{銀行丸め}} \lfloor x \rfloor = \begin{cases} x \text{ に最も近い整数} & \text{Frac}(x) \neq 0.5 \\ x \text{ に最も近い偶数} & \text{Frac}(x) = 0.5 \end{cases}$$

整数部による場合分け 実数 x の銀行丸めは, x の整数部が偶数の場合は五捨五超入に等しく, x の整数部が奇数の場合は四捨五入に等しい。

$$x \xrightarrow{\text{銀行丸め}} \lfloor x \rfloor = \begin{cases} x \text{ の五捨五超入} & \text{Int}(x) \text{ が偶数} \\ x \text{ の四捨五入} & \text{Int}(x) \text{ が奇数} \end{cases}$$

$$1.5 \xrightarrow{\text{銀行丸め}} 2, \quad 1.9 \xrightarrow{\text{銀行丸め}} 2, \quad 2.5 \xrightarrow{\text{銀行丸め}} 2$$



1.5 負数の丸め方

負の実数 x を丸める場合は、負数 x の符号を反転させた $-x$ を正数として丸め、その結果の符号を再度反転させる。たとえば、 -3.14 を切り捨てる場合は

$$-3.14 \xrightarrow{\text{符号反転}} 3.14 \xrightarrow{\text{切り捨て}} 3 \xrightarrow{\text{符号反転}} -3$$

とする。正数 x の切り捨ては $\lfloor x \rfloor$ 、負数 x の切り捨ては $-\lfloor -x \rfloor$ で求められる。

ただし、この規則を適用せず、正数も負数も常に $\lfloor x \rfloor$ で切り捨てるほうが適切な場合もある。

切り捨て (round_down) 正数 x を $\lfloor x \rfloor$ で、負数 x を $-\lfloor -x \rfloor$ で丸める。床関数・天井関数の性質から、 $-\lfloor -x \rfloor = \lceil x \rceil$ である。この関数を $F(x)$ と表すことにする。

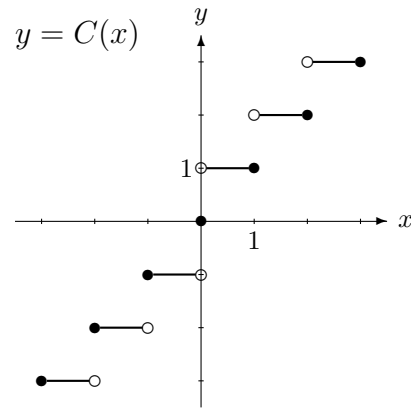
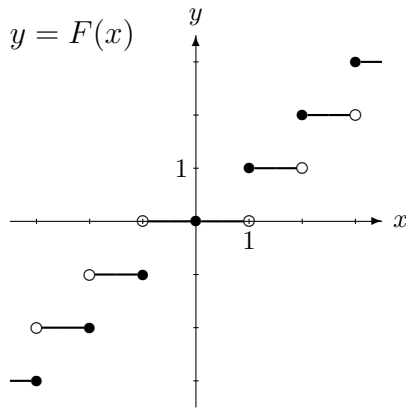
$$x \xrightarrow{\text{切り捨て}} F(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil & x \leq 0 \end{cases}$$

$$-3.14 \xrightarrow{\text{切り捨て}} -3, \quad -4.5 \xrightarrow{\text{切り捨て}} -4, \quad -5.71 \xrightarrow{\text{切り捨て}} -5$$

切り上げ (round_up) 正数 x を $\lceil x \rceil$ で、負数 x を $-\lceil -x \rceil$ で丸める。床関数・天井関数の性質から、 $-\lceil -x \rceil = \lfloor x \rfloor$ である。この関数を $C(x)$ と表すことにする。

$$x \xrightarrow{\text{切り上げ}} C(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil & x \geq 0 \\ \lfloor x \rfloor & x \leq 0 \end{cases}$$

$$-3.14 \xrightarrow{\text{切り上げ}} -4, \quad -4.5 \xrightarrow{\text{切り上げ}} -5, \quad -5.71 \xrightarrow{\text{切り上げ}} -6$$



四捨五入 (round_half_up) 正数 x を $\lfloor x + 0.5 \rfloor$ で、負数 x を $-\lfloor -x + 0.5 \rfloor$ で丸める。床関数・天井関数の性質から、 $-\lfloor -x + 0.5 \rfloor = -\lfloor -(x - 0.5) \rfloor = \lceil x - 0.5 \rceil$ である。この関数を $R(x)$ と表すことにする。

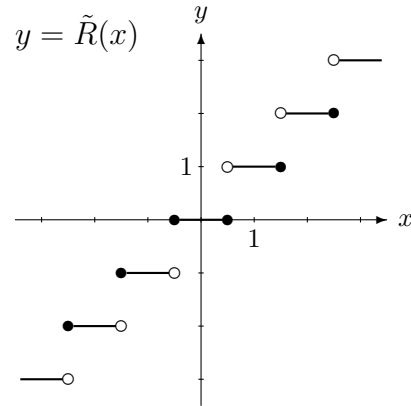
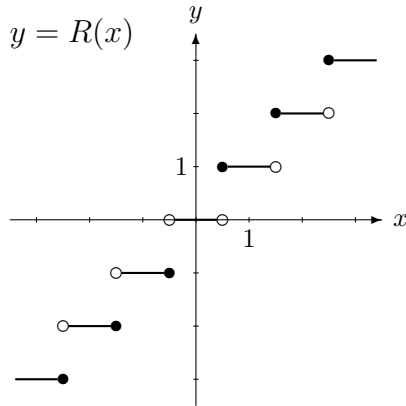
$$x \xrightarrow{\text{四捨五入}} R(x) = \begin{cases} \lfloor x + 0.5 \rfloor & x > -0.5 \\ \lceil x - 0.5 \rceil & x < 0.5 \end{cases}$$

$$-3.14 \xrightarrow{\text{四捨五入}} -3, \quad -4.5 \xrightarrow{\text{四捨五入}} -5, \quad -5.71 \xrightarrow{\text{四捨五入}} -6$$

五捨五超入 (round_half_down) 正数 x を $\lceil x - 0.5 \rceil$ で、負数 x を $-\lceil -x - 0.5 \rceil$ で丸める。床関数・天井関数の性質から、 $-\lceil -x - 0.5 \rceil = -\lceil -(x + 0.5) \rceil = \lfloor x + 0.5 \rfloor$ である。この関数を $\hat{R}(x)$ と表すことにする。

$$x \xrightarrow{\text{五捨五超入}} \hat{R}(x) = \begin{cases} \lceil x - 0.5 \rceil & x > -0.5 \\ \lfloor x + 0.5 \rfloor & x < 0.5 \end{cases}$$

$$-3.14 \xrightarrow{\text{五捨五超入}} -3, \quad -4.5 \xrightarrow{\text{五捨五超入}} -4, \quad -5.71 \xrightarrow{\text{五捨五超入}} -6$$



1.6 丸めの幅

整数に丸める場合だけでなく、1以外の値を単位として丸めることもできる。たとえば、 $x = 1234$ を $d = 10$ を単位として四捨五入する場合は、 $x = 1234$ を $d = 10$ で割った値を四捨五入し、その結果に $d = 10$ を掛ければよい。

$$1234 \xrightarrow{\div 10} 123.4 \xrightarrow{\text{四捨五入}} 123 \xrightarrow{\times 10} 1230$$

$x = 3.1415$ を $d = 0.001$ を単位として四捨五入する場合は、 $x = 3.1415$ を $d = 0.001$ で割った値を四捨五入し、その結果に $d = 0.001$ を掛ける。

$$3.1415 \xrightarrow{\div 0.001} 3141.5 \xrightarrow{\text{四捨五入}} 3142 \xrightarrow{\times 0.001} 3.142$$

丸めの幅を1として、実数 x を整数に丸めるための関数を一般に $f(x)$ とする。このとき、丸めの幅を $d > 0$ として、実数 x を d の整数倍に丸めるための関数は

$$f(x \div d) \times d \quad (5)$$

となる。この関数を $f^d(x)$ と表すことにする。

切り捨て (round_down) 正数 x を d を丸めの幅として切り捨てるとき、

$$\lfloor x \div d \rfloor \times d$$

負数 x を d を丸めの幅として切り捨てるとき、

$$\lceil x \div d \rceil \times d$$

であるから、任意の実数 x を d を丸めの幅として切り捨てる関数 $F^d(x)$ は

$$F^d(x) = \begin{cases} \lfloor x \div d \rfloor \times d & x \geq 0 \\ \lceil x \div d \rceil \times d & x \leq 0 \end{cases}$$

と表せる。

切り上げ (round_up) 正数 x を d を丸めの幅として切り上げるとき、

$$\lceil x \div d \rceil \times d$$

負数 x を d を丸めの幅として切り上げるとき、

$$\lfloor x \div d \rfloor \times d$$

であるから、任意の実数 x を d を丸めの幅として切り上げる関数 $C^d(x)$ は

$$C^d(x) = \begin{cases} \lceil x \div d \rceil \times d & x \geq 0 \\ \lfloor x \div d \rfloor \times d & x \leq 0 \end{cases}$$

と表せる。

四捨五入 (**round_half_up**) 正数 x を d を丸めの幅として四捨五入するとき,

$$\lfloor x \div d + 0.5 \rfloor \times d$$

負数 x を d を丸めの幅として四捨五入するとき,

$$\lceil x \div d - 0.5 \rceil \times d$$

であるから, 任意の実数 x を d を丸めの幅として四捨五入する関数 $R^d(x)$ は

$$R^d(x) = \begin{cases} \lfloor x \div d + 0.5 \rfloor \times d & x \div d > -0.5 \\ \lceil x \div d - 0.5 \rceil \times d & x \div d < 0.5 \end{cases}$$

と表せる。

五捨五超入 (**round_half_down**) 正数 x を d を丸めの幅として五捨五超入するとき,

$$\lceil x \div d - 0.5 \rceil \times d$$

負数 x を d を丸めの幅として五捨五超入するとき,

$$\lfloor x \div d + 0.5 \rfloor \times d$$

であるから, 任意の実数 x を d を丸めの幅として五捨五超入する関数 $\hat{R}^d(x)$ は

$$\hat{R}^d(x) = \begin{cases} \lceil x \div d - 0.5 \rceil \times d & x \div d > -0.5 \\ \lfloor x \div d + 0.5 \rfloor \times d & x \div d < 0.5 \end{cases}$$

と表せる。

銀行丸め (**round_half_even**) 実数 x を d を丸めの幅として銀行丸めをする関数は

$$\lfloor x \div d \rfloor \times d$$

と表せる。これを, $x \div d$ の小数部が 0.5 であるかどうかで場合分けすると

$$\begin{cases} \lfloor x \div d + 0.5 \rfloor \times d = \lceil x \div d - 0.5 \rceil \times d & \text{Frac}(x \div d) \neq 0.5 \\ \lfloor x \div (2d) + 0.5 \rfloor \times 2d = \lceil x \div (2d) - 0.5 \rceil \times 2d & \text{Frac}(x \div d) = 0.5 \end{cases}$$

$x \div d$ の整数部が偶数であるかどうかで場合分けすると

$$\begin{cases} \lceil x \div d - 0.5 \rceil \times d & \text{Int}(x \div d) \text{ が偶数} \\ \lfloor x \div d + 0.5 \rfloor \times d & \text{Int}(x \div d) \text{ が奇数} \end{cases}$$

のように表現することもできる。

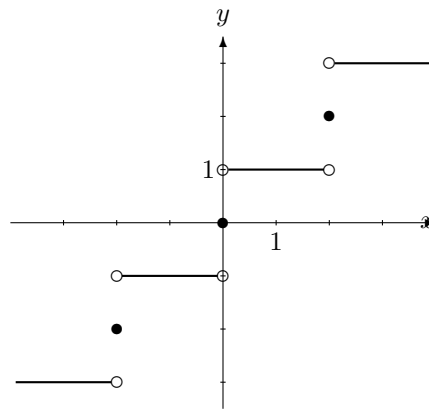
フォン・ノイマン丸め

実数 x は二進法で表現されているとし、仮数部の下位に保護ビット (guard bits) が付加されているとする。 x に対してフォン・ノイマン丸めをするには、もし、すべての保護ビットが 0 なら何もせず、反対に、少なくともひとつの保護ビットが 1 なら、仮数部の最下位ビット (LSB) に 1 を代入する。下表の太字は最下位ビット (LSB) である。

二進法	ノイマン	十進法	ノイマン
00 .00	→ 00	0.0	→ 0
00 .10	→ 01	0.5	→ 1
01 .00	→ 01	1.0	→ 1
01 .10	→ 01	1.5	→ 1
10 .00	→ 10	2.0	→ 2
10 .10	→ 11	2.5	→ 3
11 .00	→ 11	3.0	→ 3
11 .10	→ 11	3.5	→ 3

言い換えると、小数部が 0 なら何もせず、整数部が偶数 (LSB=0) で小数部が 0 でないなら、整数部に 1 を加えて奇数とし、小数部を切り捨てる。整数部が奇数 (LSB=1) で小数部が 0 でないなら、小数部を切り捨てる。フォン・ノイマン丸めをすると、小数部が 0 ならば丸められず、小数部が 0 でないならば最も近い奇数に丸められる。区間 $(0, 1)$ は $0 < x < 1$ を満たす実数 x の集まりである。

十進法	ノイマン
0	→ 0
(0, 1)	→ 1
1	→ 1
(1, 2)	→ 1
2	→ 2
(2, 3)	→ 3
3	→ 3
(3, 4)	→ 3
4	→ 4



フォン・ノイマン丸めは、 x を丸めの幅を 2 として切り捨てた値 $\lfloor x \div 2 \rfloor \times 2$ と、丸めの幅を 2 として切り上げた値 $\lceil x \div 2 \rceil \times 2$ の平均値になっている。

$$\lfloor x \div 2 \rfloor + \lceil x \div 2 \rceil$$

フォン・ノイマン丸めは最近接丸めではないが、正のバイアスや負のバイアスはない。