2　確率変数

2.1　離散型確率変数と確率分布

確率変数　試行の結果によって値が定まる変数のことを確率変数といい[*i]，X 等 *i
の文字で表す。確率変数の値のことを実現値といい，x 等の文字で表す[*ii]。確率 *ii
変数 X が離散量（整数値）であるとき，X を離散型確率変数，X が連続量（実数値）であるとき，X を連続型確率変数という。

離散型確率分布　離散型確率変数 X の実現値のひとつを x とする。$X = x$ となる事象の確率を $P\left(X = x\right)$ と表すことにする。実現値 x に，確率 $P\left(X = x\right)$ を対応させたものを離散型確率分布という。$p(x) = P\left(X = x\right)$ とおくとき，x の関数 $p(x)$ を確率質量関数あるいは簡単に確率関数という。確率 $P\left(X = x\right)$ の総和は常に 1 である。

$$P\left(\Omega\right) = \sum_{x} P\left(X = x\right) = 1$$

たとえば，3 枚の硬貨を同時に投げ，表の出た枚数を X とすると，X は確率変数である。標本点は HHH，HHT，HTH，THH，HTT，THT，TTH，TTT で，これらは同様に確からしいから，X の確率分布表は次のようになる。

X の値	0	1	2	3
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

期待値（expected value; expectation）　離散型確率変数 X が次の確率分布表で与えられているとする。確率の総和は 1 である（$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$）。

$X:$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P:$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

次のように定めた値を X の期待値または平均値といい，$E\left[X\right]$ と表す。期待値は確率変数ではなく確定値である。

$$E\left[X\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{1}$$

確率変数の関数の期待値　X は離散型確率変数，$y = g(x)$ は実数値関数とする。試行の結果によって X の値や $g(X)$ の値が定まるため，$Y = g(X)$ は確率変数である。上の確率分布をもつ X に対して，$g(X)$ の期待値を次のように定める。

$$E\left[g(X)\right] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p_i$$

[*i] 確率変数 X は標本点 ω の関数である。

[*ii] 確率変数を大文字で，その実現値を小文字で表すことが多い。

分散（variance）　確率変数 X の期待値を $\mu = E[X]$ とおく。$(X-\mu)^2$ の期待値を X の分散といい，$V[X]$ と表す。分散も確率変数ではなく確定値である。[*iii]

$$V[X] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i, \qquad V[X] = E\left[\{X - E[X]\}^2\right] \tag{2}$$

離散型確率変数の場合も，公式 $V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2$ が成り立つ。なぜなら $\sum x_i p_i = \mu = E[X]$，$\sum p_i = 1$ を用いると

$$\begin{aligned} V[X] &= \sum(x_i-\mu)^2 p_i = \sum({x_i}^2 - 2\mu x_i + \mu^2)p_i \\ &= \sum {x_i}^2 p_i - 2\mu \sum x_i p_i + \mu^2 \sum p_i \\ &= \sum {x_i}^2 p_i - 2\mu\mu + \mu^2 \\ &= \sum {x_i}^2 p_i - \mu^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2 \end{aligned}$$

となるからである。離散型確率変数 X の分散は次のように求めてもよい。

$$V[X] = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - \mu^2, \qquad V[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 \tag{3}$$

また，分散の非負の平方根を X の標準偏差といい，$\sigma[X]$ と表す。

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]} \tag{4}$$

期待値・分散の求め方　離散型確率変数 X の確率分布が次の分布表で表されているとする。

X :	0	1	2	3
P :	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

X の期待値 $E[X]$，分散 $V[X]$，標準偏差 $\sigma[X]$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned} &E[X] = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2} \\ &V[X] = \left(0-\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{8} + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2\frac{3}{8} + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2\frac{3}{8} + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{8} = \frac{3}{4} \\ &V[X] = 0^2\cdot\frac{1}{8} + 1^2\cdot\frac{3}{8} + 2^2\cdot\frac{3}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \\ &\sigma[X] = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.866 \end{aligned}$$

[*iii] $g(x) = (x-\mu)^2$ のとき，分散は $V[X] = E[g(X)]$ と表せる。

2.2 連続型確率変数と確率分布

分布関数　X は離散型または連続型確率変数とする。$F(x) = P(X \leqq x)$ とおくとき，x の関数 $F(x)$ を累積分布関数あるいは簡単に分布関数という。分布関数のグラフは累積相対度数の折れ線図とほぼ同等である。

確率密度関数　X が連続型確率変数で，その分布関数 $F(x)$ が微分可能のとき，その導関数 $f(x) = F'(x)$ のことを確率密度関数という[*iv]。確率密度関数 $f(x)$ は，[*iv]
$X = x$ の近傍の起こりやすさを表すが，確率 $P(X = x)$ そのものではない。事象 $a \leqq X \leqq b$ の確率は $f(x)$ の積分（または広義積分）で表される。[*v] [*v]

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{5}$$

全事象 Ω の確率は 1 である。

$$P(\Omega) = P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

期待値　連続型確率変数 X が確率密度関数 $f(x)$ をもつとする。次のように定めた値を X の期待値または平均値といい，$E[X]$ と表す。期待値は確率変数ではなく確定値である。

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{6}$$

分散　確率変数 X の期待値を $\mu = E[X]$ とおく。$(X-\mu)^2$ の期待値を X の分散といい，$V[X]$ と表す。分散は確率変数ではなく確定値である。

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx, \qquad V[X] = E\left[\{X - E[X]\}^2\right] \tag{7}$$

連続型確率変数の場合も $V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2$ が成り立つので，連続型確率変数 X の分散は次のように求めてもよい。

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2, \qquad V[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 \tag{8}$$

また，分散の非負の平方根を X の標準偏差といい，$\sigma[X]$ と表す。

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]} \tag{9}$$

[*iv] 確率密度関数をもたない確率分布もある。

[*v] 1 点の確率は $P(X = a) = P(X = b) = 0$ だから，$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$。

2.3 確率変数の期待値と分散

期待値の性質　X は離散型または連続型の確率変数，a，b は定数（試行の結果によらない量）とする。期待値 $E\,[\ \ ]$ は次の性質をもつ。

$$E\,[aX] = aE\,[X]\,, \qquad E\,[b] = b, \qquad E\,[aX+b] = aE\,[X] + b \tag{10}$$

3 番目の式を確かめる。X は離散型確率変数とし，次の確率分布をもつとする。

$X:$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P:$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$\sum x_i p_i = E\,[X]$，$\sum p_i = 1$ を用いると，

$$E\,[aX+b] = \sum(ax_i + b)p_i = a\sum x_i p_i + b\sum p_i = aE\,[X] + b$$

となるから，(10) の 3 番目の式が示される。3 番目の式において $b=0$ とすると 1 番目の式が示され，3 番目の式において $a=0$ とすると 2 番目の式が示される。X が連続型の場合も同様である。

分散の性質　X は離散型または連続型の確率変数，a，b は定数とする。分散 $V\,[\ \ ]$ は次の性質をもつ。

$$V\,[aX] = a^2V\,[X]\,, \qquad V\,[b] = 0, \qquad V\,[aX+b] = a^2V\,[X] \tag{11}$$

3 番目の式を確かめる。期待値の性質と，$V\,[X] = E\,[\{X - E\,[X]\}^2]$ を用いると，

$$\begin{aligned}
V\,[aX+b] &= E\left[\{(aX+b) - E\,[aX+b]\}^2\right] \\
&= E\left[\{(aX+b) - (aE\,[X]+b)\}^2\right] \\
&= E\left[a^2\{X - E\,[X]\}^2\right] \\
&= a^2E\left[\{X - E\,[X]\}^2\right] = a^2V\,[X]
\end{aligned}$$

となるから，(11) の 3 番目の式が示される。3 番目の式において $b=0$ とすると 1 番目の式が示され，3 番目の式において $a=0$ とすると 2 番目の式が示される。

標準偏差の性質　(11) から，標準偏差 $\sigma\,[\ \ ]$ は次の性質をもつ。

$$\sigma\,[aX] = |a|\sigma\,[X]\,, \qquad \sigma\,[b] = 0, \qquad \sigma\,[aX+b] = |a|\sigma\,[X] \tag{12}$$

2.4　チェビシェフの不等式

Markov の不等式　離散型または連続型確率変数 X は非負（$X \geqq 0$），定数 a は正（$a > 0$）とする。ここでは X は連続型とする。

$$\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} xf(x)dx \\
&\geqq \int_{a}^{\infty} xf(x)dx \\
&\geqq \int_{a}^{\infty} af(x)dx = a\int_{a}^{\infty} f(x)dx = aP\left(X \geqq a\right)
\end{aligned}$$

となるから，次の Markov の不等式が成り立つ。X が離散型の場合も同様である。

$$P\left(X \geqq a\right) \leqq \frac{E\left[X\right]}{a}$$

Chebyshev の不等式　Y についての Markov の不等式は $P\left(Y \geqq a\right) \leqq E\left[Y\right]/a$ と表せる。確率変数 X が期待値 μ，標準偏差 $\sigma > 0$ の分布をもつとき，

$$Y = (X-\mu)^2 \geqq 0, \qquad a = k^2\sigma^2 > 0 \qquad (k > 0)$$

とおくと，Markov の不等式から，

$$\begin{gathered}
P\left((X-\mu)^2 \geqq k^2\sigma^2\right) \leqq \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{k^2\sigma^2} \\
P\left(|X-\mu| \geqq k\sigma\right) \leqq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}
\end{gathered}$$

となる。期待値 μ，標準偏差 $\sigma > 0$ である確率変数 X と，任意の $k > 0$ に対して，次の Chebyshev の不等式が成り立つ。

$$P\left(|X-\mu| \geqq k\sigma\right) \leqq \frac{1}{k^2}, \qquad P\left(|X-\mu| < k\sigma\right) \geqq 1 - \frac{1}{k^2} \tag{13}$$

参考文献

統計学入門（基礎統計学）
東京大学教養学部統計学教室（編）東京大学出版会 978-4-13-042065-5

統計学
久保川 達也 （著） 東京大学出版会 978-4-13-062921-8

はじめての統計学
道家 暎幸（共著） コロナ社 978-4-339-06113-0

確率統計 新版 （新版数学シリーズ）
岡本 和夫 （ほか著） 実教出版 978-4-407-32171-5

統計学序論 改訂版
山本 義郎 （著） 東海大学出版部 978-4-486-02133-9

確率統計（高専テキストシリーズ）
上野 健爾（監修） 森北出版 978-4-627-05561-2

基本統計学 第４版
宮川 公男 （著） 有斐閣 978-4-641-16455-0

新統計入門
小寺 平治 （著） 裳華房 978-4-7853-1099-8

Schaum's Outline of Introduction to Probability and Statistics
Seymour Lipschutz （著） McGraw-Hill Education 978-0-07-176249-6

A Dictionary of Statistics
Graham Upton （著） Oxford Univ Pr 978-0-19-967918-8

`www5e.biglobe.ne.jp/~emm386/statistics/`