1　事象と確率

1.1　順列・組合せ

階乗　n は正の整数とする。1 から n までの整数の積を n の階乗といい，$n!$ と表す。

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \qquad (n \geqq 1\text{ のとき})$$

一般に $(n+1)! = (n+1)\times n!$ であるから，$n=0$ のときは，$0! = 1$ と定める。

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad \cdots$$

順列　n 個のものから異なる r 個を取る順列の総数は次の式で求められ，${}_n\mathrm{P}_r$ 等と表す。

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0 \leqq r \leqq n)$$

A，B，C，D，E から異なる 3 個を取って一列に並べる方法 (A,B,C), (A,B,D), (A,B,E), (A,C,B), . . . の総数は ${}_5\mathrm{P}_3$ である。

$${}_5\mathrm{P}_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

組合せ　n 個のものから異なる r 個を取る組合せの総数は次の式で求められ，${}_n\mathrm{C}_r$ あるいは $\binom{n}{r}$ 等と表す。二項係数とよばれることもある。

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (0 \leqq r \leqq n) \qquad (1)$$

A，B，C，D，E から異なる 3 個を取り出す方法 {A,B,C}, {A,B,D}, {A,B,E}, {A,C,D}, . . . の総数は ${}_5\mathrm{C}_3$ である。

$${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$$

Pascal の三角形　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は次の法則を満たす。

$${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1, \qquad {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}, \qquad {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \qquad (2)$$

(2) の第 1 式については，$0! = 1$ だから

$${}_n\mathrm{C}_0 = \frac{n!}{0!n!} = 1, \qquad {}_n\mathrm{C}_n = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

第 2 式については

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

第 3 式については，$\dfrac{1}{(k-1)!}=\dfrac{k}{k!}$ だから

$$\begin{aligned}{}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}&=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\\&=\frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\{(n-r)+r\}=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_n\mathrm{C}_r\end{aligned}$$

より示される。(2) により，二項係数は Pascal の三角形を用いても求められる。

$$\begin{array}{llccccccccccc}
{}_1\mathrm{C}_r & \cdots & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
{}_2\mathrm{C}_r & \cdots & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
{}_3\mathrm{C}_r & \cdots & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
{}_4\mathrm{C}_r & \cdots & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
{}_5\mathrm{C}_r & \cdots & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

二項定理　$(p+q)^n$ の展開項の係数は二項係数になる。これを二項定理という。

$$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,p^kq^{n-k} \tag{3}$$

$n=2$，$n=3$，$n=4$ のとき，二項定理は次のようになる。

$$\begin{aligned}(p+q)^2&={}_2\mathrm{C}_0q^2+{}_2\mathrm{C}_1pq+{}_2\mathrm{C}_2p^2\\(p+q)^3&={}_3\mathrm{C}_0q^3+{}_3\mathrm{C}_1pq^2+{}_3\mathrm{C}_2p^2q+{}_3\mathrm{C}_3p^3\\(p+q)^4&={}_4\mathrm{C}_0q^4+{}_4\mathrm{C}_1pq^3+{}_4\mathrm{C}_2p^2q^2+{}_4\mathrm{C}_3p^3q+{}_4\mathrm{C}_4p^4\end{aligned}$$

例えば $n=3$，$k=2$ のとき $(p+q)(p+q)(p+q)$ の展開項が p^2q^1 になるのは，3 個の p から異なる 2 個を選び出す場合であるから ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りある。よって $(p+q)^3$ の展開項 p^2q^1 の係数は ${}_3\mathrm{C}_2$ となる。他の n や k でも同様である。

1.2　集合

*i　**集合**　ものの集まりを集合といい *i，集合に含まれるものを要素または元という。x が集合 A の要素である（x は A に含まれる，属する）ことを $x\in A$ と表す。また，2 つの集合 A，B について，A のすべての要素が B の要素でもあるとき，A は B の**部分集合**である（A は B に含まれる）といい，$A\subset B$ と表す。

$$A\subset B\iff\text{「}x\in A\implies x\in B\text{」}$$

$A\subset B$ かつ $B\subset A$ のとき，A と B は等しいという。

$$A=B\iff\text{「}A\subset B\text{ かつ }B\subset A\text{」}$$

*i 集合に含まれるか含まれないかは明確でなければならない。

0 個の要素の集まりを**空集合**といい，$\varnothing$ または $\{\}$ と表す。空集合は任意の集合の部分集合とみなされる。

$$\varnothing \subset A$$

考察の対象とするもの全体の集合を**全体集合**という [*ii]。集合 A，B は全体集合 Ω の部分集合とする。A と B の両方に含まれる要素全体の集合 $A \cap B$ を**共通部分**または積集合，A と B の少なくとも一方に含まれる要素全体の集合 $A \cup B$ を**和集合**という。 *ii

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

全体集合の要素のうち，集合 A に含まれない要素全体の集合を A の**補集合**といい，$\bar{A}$ または $A^{\complement}$（A コンプリメントと読む）[*iii] または $\Omega - A$ と表す。 *iii

$$\bar{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ かつ } x \notin A\}$$

補集合に関して次のことが成り立つ。

$$\bar{\bar{A}} = A, \qquad \bar{\Omega} = \varnothing, \qquad \bar{\varnothing} = \Omega$$

一般に，交換法則，結合法則，分配法則，de Morgan の法則が成り立つ。

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, & A \cup B &= B \cup A \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), & A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}, & \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

集合の要素の個数　集合 A が有限個の要素をもつとき，A は有限集合であるという。そうでないときは無限集合という。A が有限集合のとき，A に含まれる要素の個数を $\#(A)$ と表す。集合の要素の個数は非負である。[*iv] *iv

$$\#(A) \geqq 0, \qquad \#(\varnothing) = 0$$

集合 A と B の両方に含まれる要素が存在しない（$A \cap B = \varnothing$）とき，A と B は**排反**であるという。集合の要素の個数について次が成り立つ。

$$\begin{gathered} A \cap B = \varnothing \implies \#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) \\ A \subset B \implies \#(A) \leqq \#(B) \end{gathered}$$

必ずしも排反とは限らないときは次が成り立つ（包除原理という）。

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

[*ii] 全体集合は考察の対象に応じて適切なものにする。
[*iii] complement：補完物
[*iv] 非負とは，負でないこと，つまり正または 0 であること。

n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のうち，複数の集合に同時に含まれる要素が存在しない（$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \cdots = \varnothing$）とき，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ は排反であるという。$A_1, A_2, \ldots, A_n$ が排反のとき次が成り立つ。

$$A_i \text{ が排反} \implies \#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2) + \cdots + \#(A_n)$$

1.3　標本空間

試行と事象　その結果が確率的に定まるような実験や観測等のことを**試行**（trial）といい，試行の個々の結果を標本点という。ある試行において，その標本点全体の集合を標本空間といい，Ω と表す。Ω の部分集合を**事象**（event）という。事象は幾つかの標本点の集まりであり，$\varnothing$ を**空事象**，Ω 自身を**全事象**という[*v]。事象 A，B に対して，$A \cup B$ を**和事象**，$A \cap B$ を**積事象**，$\bar{A}$ を**余事象**という。

硬貨を投げ，表が出ることを H，裏が出ることを T と表すことにする。2 枚の硬貨を同時に投げる試行において，1 枚目が表である事象を A，2 枚目が表である事象を B とすると，各事象は次のようになる。

全事象	$\Omega = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$	和事象	$A \cup B = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}\}$
事象 A	$A = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}\}$	積事象	$A \cap B = \{\mathrm{HH}\}$
事象 B	$B = \{\mathrm{HH}, \mathrm{TH}\}$	余事象	$\bar{A} = \{\mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$

確率（probability）　事象の起こりやすさを表す数値のことを確率といい，確率は次の 3 条件を満たす。事象 A の確率を $P(A)$ と表す。

1. $0 \leqq P(A) \leqq 1$
2. $P(\varnothing) = 0$，$P(\Omega) = 1$
3. $A_1, A_2, \ldots$ が排反のとき，$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

上の条件 2 と条件 3 を組み合わせると，次が成り立つことも分かる。

$$A \text{ と } B \text{ が排反} \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$$

特に，標本空間 Ω が有限個の標本点からなり，どれが起こることも同様に確からしい（equally likely）場合には，確率は次のように求められる。

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

[*v] 1 個の標本点のみからなる事象を根元事象，複数の標本点からなる事象を複合事象という。

1.4 条件付き確率

条件付き確率　事象 A が起こったことを条件として事象 B が起こる確率のことを条件付き確率といい，$P(B \mid A)$ または $P_A(B)$ と表す。

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4}$$

(4) は次の式と同値である。これは常に成り立つ。

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

次の条件を満たすとき，事象 A，B は**独立**であるという。

$$A \text{ と } B \text{ は独立} \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \tag{5}$$

Bayes の定理　この定理を用いると，条件を反転させることができる。A と $\bar{A}$ は排反なので，事象 B は排反な事象 $A \cap B$ と $\bar{A} \cap B$ の和事象になる。

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\bar{A} \cap B\right)$$
$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A), \qquad P\left(\bar{A} \cap B\right) = P\left(\bar{A}\right) P\left(B \mid \bar{A}\right)$$

事象 B が起こったとき事象 A が起こる確率は次のように表せる（Bayes の定理）。

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\, P(B \mid A)}{P(A)\, P(B \mid A) + P\left(\bar{A}\right) P\left(B \mid \bar{A}\right)} \tag{6}$$

さらに，事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が排反で，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \mathit{\Omega}$ のとき，Bayes の定理は次のようになる。

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{P(A_1)\, P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n)\, P(B \mid A_n)}$$

参考文献

統計学入門（基礎統計学）		
東京大学教養学部統計学教室（編）	東京大学出版会	978-4-13-042065-5
統計学		
久保川 達也 （著）	東京大学出版会	978-4-13-062921-8
はじめての統計学		
道家 暎幸（共著）	コロナ社	978-4-339-06113-0
確率統計 新版 （新版数学シリーズ）		
岡本 和夫 （ほか著）	実教出版	978-4-407-32171-5
統計学序論 改訂版		
山本 義郎 （著）	東海大学出版部	978-4-486-02133-9
確率統計（高専テキストシリーズ）		
上野 健爾（監修）	森北出版	978-4-627-05561-2
基本統計学 第４版		
宮川 公男 （著）	有斐閣	978-4-641-16455-0
新統計入門		
小寺 平治 （著）	裳華房	978-4-7853-1099-8
Schaum's Outline of Introduction to Probability and Statistics		
Seymour Lipschutz （著）	McGraw-Hill Education	978-0-07-176249-6
A Dictionary of Statistics		
Graham Upton （著）	Oxford Univ Pr	978-0-19-967918-8

`www5e.biglobe.ne.jp/~emm386/statistics/`