# 3　仮説検定

## 3.1　仮説検定の考え方

**例 1**　ある硬貨を 5 回投げたところ，すべて表が出た。このデータから，この硬貨の表の出る確率は 1/2 より大きいといえるか。
（解答）　この硬貨の表の出る確率を $p$ とし，次の仮説 $H_0$，$H_1$ を立てる。

$$H_0:\ p=\frac{1}{2},\qquad H_1:\ p>\frac{1}{2}$$

$H_0 : p = 1/2$ を仮定すると，硬貨を 5 回投げてすべて表が出る確率は二項分布で求められる。

$${}_5\mathrm{C}_5\,p^5(1-p)^{5-5}=1\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{1}{32}=0.03125<0.05$$

この確率は非常に小さい（0.05 より小さい）から，$H_0$ は正しくないと判断できる。したがって $H_1$ が正しいと判断でき，この硬貨の表の出る確率は 1/2 より大きいといえる。

**仮説検定の方法**　母数についての主張のことを仮説といい，仮説の真偽を標本調査によって判断する手法のことを仮説検定（hypothesis test）という。はじめに**帰無仮説**（null hypothesis）$H_0$ と**対立仮説**（alternative hypothesis）$H_1$ を立てるが，両側検定と片側検定のうち，どれを用いるかによって仮説の立て方が異なる。仮説が偽であると判定することを**棄却**（reject）といい，仮説が真である，あるいは偽であるとはいえないと判定することを**採択**（accept）という。仮説検定は「背理法」の考え方によっている。棄却できるかどうかを判断するための基準となる確率のことを**有意水準**（significance level）という。仮説検定は次の手順で行う。

1. 帰無仮説を設定する
2. 有意水準を設定する（$\alpha = 0.05$ または $\alpha = 0.01$）
3. 棄却域を選択する（両側検定または片側検定）
4. 観測された事象が棄却域に含まれるかどうかを判定する

母数がある値と等しいかどうかを確かめたいときは両側検定で「$H_0 : p = 1/2$，$H_0 : p \fallingdotseq 1/2$」のように設定し，母数がある値より大きいかどうかを確かめたいときは右側検定で「$H_0 : p = 1/2$，$H_0 : p > 1/2$」，小さいかどうかを確かめたいときは左側検定で「$H_0 : p = 1/2$，$H_0 : p < 1/2$」のように設定する。

たとえば「例 1」は右側検定で，帰無仮説を $H_0 : p = 1/2$，対立仮説を $H_1 : p > 1/2$ と設定し，有意水準は $\alpha = 0.05$ を用いた。帰無仮説 $H_0$ を仮定すると，表が 5 回以上出る確率は $P(X \geqq 5) < 0.05$ だから，帰無仮説 $H_0$ は棄却される。したがって対立仮説 $H_1$ が採択され，表が出る確率は 1/2 より大きいといえる。

**例 2**　ある硬貨を 7 回投げたところ，表が 6 回出た。このデータから，この硬貨の表の出る確率は 1/2 より大きいといえるか。

（解答）　この硬貨の表の出る確率を $p$ とする。右側検定で，次の帰無仮説 $H_0$ と対立仮説 $H_1$ を立てる。

$$H_0 :\ p = \frac{1}{2}, \qquad H_1 :\ p > \frac{1}{2}$$

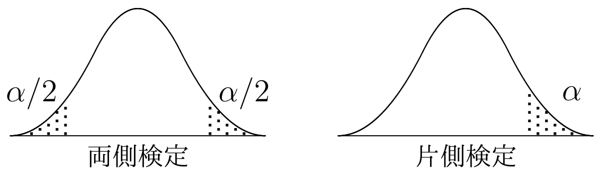
有意水準は $\alpha = 0.05$ とする。$H_0 :\ p = 1/2$ を仮定すると，硬貨を 7 回投げて表が 6 回以上出る確率は

$$\begin{aligned} P\left(X \geqq 6\right) &= P\left(X = 6\right) + P\left(X = 7\right) = {}_7\mathrm{C}_6\, p^6(1-p) + {}_7\mathrm{C}_7\, p^7 \\ &= 7\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{16} = 0.0625 > 0.05 \end{aligned}$$

となって $\alpha = 0.05$ より大きいから，帰無仮説 $H_0$ は棄却されない。したがって帰無仮説 $H_0$ が採択され，表が出る確率は 1/2 より大きいとはいえない。

## 3.2　検定統計量と棄却域

検定のために標本から求めた量のことを検定統計量という。検定統計量の値が，あらかじめ定められた臨界値を超えれば棄却し，そうでなければ棄却しない。検定統計量が棄却される値の範囲のことを棄却域という。




なお，検定統計量は，標準正規分布や $t$ 分布等に従うものを用いることが多い。

たとえば「例 1」は右側検定で，$H_0 : p = 1/2$ を仮定する。表が出る回数 $X$ は二項分布 $B(5, 1/2)$ に従う。

| $X:$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P:$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

「例 1」の検定統計量は $X$ であり，$P\left(X \geqq 5\right) < 0.05$，$P\left(X \geqq 4\right) > 0.05$ だから，棄却域は $X \geqq 5$ である。$X = 5$ が棄却域に含まれるから，帰無仮説 $H_0$ は棄却される。したがって対立仮説 $H_1$ が採択され，表が出る確率は 1/2 より大きいといえる。

**例 3**　ある硬貨を 400 回投げたところ，表が 180 回出た。このデータから，この硬貨の表の出る確率は 1/2 であるといえるか。
（解答）　この硬貨の表の出る確率を $p$ とする。両側検定で，次の帰無仮説 $H_0$ と対立仮説 $H_1$ を立てる。

$$H_0:\ p = \frac{1}{2}, \qquad H_1:\ p \fallingdotseq \frac{1}{2}$$

有意水準は $\alpha = 0.05$ とする。帰無仮説 $H_0$ を仮定したとき，表が出る回数 $X$ は二項分布 $B(400, 1/2)$ になる。

$$E[X] = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200, \qquad \sigma[X] = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 10$$

$n = 400$ は十分大きいので，表が出る回数 $X$ の標準化を $Z$ とすると，$Z$ は近似的に標準正規分布に従う。検定統計量は $Z$ で，棄却域は $|Z| > 1.96$ である。

$$z = \frac{180 - 200}{10} = -2.00 < -1.96$$

検定統計量の値が棄却域に含まれるから，帰無仮説 $H_0$ は棄却される。したがって対立仮説 $H_1$ が採択され，表が出る確率は 1/2 ではないといえる。

## 3.3　母平均の検定（母分散が既知の場合）

正規母集団において，母平均を $\mu$，母分散を $\sigma^2$ とし，この母集団から取り出した大きさ $n$ の標本の標本平均を $\bar{X}$ とする。区間推定の場合と同様に，次の $Z$ は標準正規分布に従う。

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

母分散 $\sigma^2$ が既知のとき，$Z$ を検定統計量として母平均 $\mu$ についての検定を行うことができる。標準正規分布に従う検定統計量 $Z$ を用いる方法を **Z 検定**という。母平均 $\mu$ がある定数 $\mu_0$ に等しいかどうかの検定（両側検定）を行う場合，帰無仮説は $\mu = \mu_0$，対立仮説は $\mu \fallingdotseq \mu_0$，有意水準が $\alpha$ のときの棄却域は $|Z| > z_{\alpha/2}$，$\alpha = 0.05$ のとき棄却域は $|Z| > 1.96$ とする。$\mu$ が $\mu_0$ より大きいかどうかの検定（右側検定）や，その反対（左側検定）を行う場合は下表のようにする。

| | 帰無仮説 $H_0$ | 対立仮説 $H_1$ | 棄却域 | 棄却域（$\alpha = 0.05$） |
|---|---|---|---|---|
| 両側検定 | $\mu = \mu_0$ | $\mu \fallingdotseq \mu_0$ | $\|Z\| > z_{\alpha/2}$ | $\|Z\| > 1.96$ |
| 右側検定 | $\mu = \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $Z > z_\alpha$ | $Z > 1.64$ |
| 左側検定 | $\mu = \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | $Z < -z_\alpha$ | $Z < -1.64$ |

なお，正規母集団でない場合も，$n$ が十分大きいならば，$Z$ を標準正規分布と見なして，Z 検定を行うことができる。

**例 4**　ある製品の重量は $\sigma^2 = 1.6$ の分散を持ち，正規分布に従うことがわかっている。10 個の標本について重量を調べると下記のとおりであった。

101.1　103.2　102.1　99.2　100.5　101.3　99.7　100.5　98.9　101.4

有意水準 $\alpha = 0.05$ で，母平均 $\mu$ が 100 と異なるかどうか検定せよ。
（解答）　両側検定で，次の帰無仮説 $H_0$ と対立仮説 $H_1$ を立てる。

$$H_0: \ \mu = 100, \qquad H_1: \ \mu \neq 100$$

標本平均 $\bar{X}$ の値は

$$\bar{x} = \frac{101.1 + 103.2 + \cdots + 101.4}{10} = 100.79$$

である。帰無仮説 $H_0 : \mu = 100$ を仮定すると，検定統計量 $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ は標準正規分布に従い，両側検定の棄却域は $|Z| > 1.96$ である。

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{100.79 - 100}{\sqrt{1.6}/\sqrt{10}} = 1.975 > 1.96$$

検定統計量の値が棄却域に含まれるから，帰無仮説 $H_0$ は棄却される。したがって対立仮説 $H_1$ が採択され，母平均 $\mu$ は 100 とは異なるといえる。

## 3.4　2 種類の過誤

対立仮説 $H_1$ が真のときに対立仮説 $H_1$ を採択する（$H_0$ が偽のときに $H_0$ を棄却する）場合，あるいは帰無仮説 $H_0$ が真のときに帰無仮説 $H_0$ を採択する（$H_0$ が真のときに $H_0$ を棄却しない）場合は正しい判断をしたことになるが，判断を誤ることもある。

| | $H_0$ を採択 | $H_1$ を採択 |
|---|---|---|
| $H_0$ が真 | ○ | 第 1 種の過誤 |
| $H_1$ が真 | 第 2 種の過誤 | ○ |

帰無仮説 $H_0$ が真のときに対立仮説 $H_1$ を採択する（$H_0$ が真のときに $H_0$ を棄却する）誤りのことを**第 1 種の過誤**（type I error）という。この誤りを犯す確率は有意水準 $\alpha$ に等しい。反対に，対立仮説 $H_1$ が真のときに帰無仮説 $H_0$ を採択する（$H_0$ が偽のときに $H_0$ を棄却しない）誤りのことを**第 2 種の過誤**（type II error）という。この誤りを犯す確率はすぐには分からない。

## 3.5　母平均の検定（母分散が未知の場合）

正規母集団において，母平均を $\mu$，母分散を $\sigma^2$ とし，この母集団から取り出した大きさ $n$ の標本の標本平均を $\bar{X}$，不偏分散を $U^2$ とする。区間推定の場合と同様に，次の $T$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従う。

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{U}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

母分散 $\sigma^2$ が未知のとき，$T$ を検定統計量として母平均 $\mu$ についての検定を行うことができる。$t$ 分布に従う検定統計量 $T$ を用いる方法を **$t$ 検定**という。

例　A 市の 18 歳男子は背が高いという噂が立った。そこで，全国の 18 歳の男子の平均身長と比べるために，A 市の 18 歳男子 12 人を無作為に選び，身長を調べたところ，次のデータを得た。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 165.6 | 171.3 | 183.2 | 178.5 | 174.6 | 168.7 |
| 176.1 | 187.2 | 176.9 | 170.1 | 167.4 | 179.3 |

全国の 18 歳男子の平均身長は 171.2 cm であるという。A 市の 18 歳男子は，全国平均と比べて背が高いといえるか。A 市の 18 歳男子の身長の分布は正規分布に従うとし，有意水準を 5%として検定せよ。

（解答）　A 市の 18 歳男子の平均身長を $\mu$ とする。右側検定で，次の帰無仮説 $H_0$ と対立仮説 $H_1$ を立てる。

$$H_0:\ \mu = 171.2, \qquad H_1:\ \mu > 171.2$$

標本平均 $\bar{X}$ の値は

$$\bar{x} = \frac{165.6 + 171.3 + \cdots + 179.3}{12} = 174.9$$

不偏分散 $U^2$ の値は

$$u^2 = \frac{12}{11}\left(\frac{165.6^2 + \cdots + 179.3^2}{12} - 174.9^2\right) = 43.2$$

である。帰無仮説 $H_0 : \mu = 171.2$ を仮定すると，検定統計量 $T = (\bar{X} - \mu)/(u/\sqrt{n})$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従い，右側検定の棄却域は $T > t_{2\times 0.05/2}(12-1)$ である。$T$ の値を求め，$t$ 分布の両側 10%点 $t_{0.10/2}(11) = 1.796$ と比較すると

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{u/\sqrt{n}} = \frac{174.9 - 171.2}{\sqrt{43.2}/\sqrt{12}} = 1.950 > 1.796$$

検定統計量の値が棄却域に含まれるから，帰無仮説 $H_0$ は棄却される。したがって対立仮説 $H_1$ が採択され，A 市の 18 歳男子は全国平均と比べて背が高いといえる。

## 3.6　母比率の検定

$A$ または $\bar{A}$ のいずれかからなる母集団のことを二項母集団といい，母集団の中の $A$ の割合を母比率，標本の中の $A$ の割合を標本比率という。二項母集団において，母比率を $p$ とし，この母集団から取り出した大きさ $n$ の標本の標本比率を $\hat{P}$ とする。区間推定の場合と同様に，$n$ が十分大きいならば，次の $Z$ は近似的に標準正規分布に従う。

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$$

Z 検定を利用して，母比率の検定が行うことができる。なお，3.2 節「例 3」は，母比率の検定と実質的に同じものである。

例　普段，部屋の稼働率が平均 77% であるホテルが，宿泊客を増やすためにキャンペーンを行った。するとキャンペーンの期間中のある 1 日は，500 室ある部屋のうち 401 室の部屋が稼働したという。この日の宿泊客は普段よりも多かったといえるか。
（解答）　キャンペーン中の稼働率を $p$ とする。右側検定で，次の帰無仮説 $H_0$ と対立仮説 $H_1$ を立てる。

$$H_0:\ p = 0.77, \qquad H_1:\ p > 0.77$$

また，標本比率 $\hat{P}$ の値は

$$\hat{p} = \frac{401}{500}$$

$H_0 : p = 0.77$ を仮定したとき，標本の大きさ $n = 500$ は十分大きいので，検定統計量 $Z = (\hat{P} - p)/\sqrt{p(1-p)/n}$ は標準正規分布と見なせる。$Z$ の値を求め，標準正規分布の上側 5% 点 $z_{0.05} = 1.645$ と比較すると

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{401/500 - 0.77}{\sqrt{0.77(1-0.77)/500}} = 1.700 > 1.645$$

検定統計量の値が棄却域に含まれるから，帰無仮説 $H_0$ は棄却される。したがって対立仮説 $H_1$ が採択され，この日の宿泊客は普段よりも多かったといえる。

## 参考文献


統計学入門（基礎統計学）
東京大学教養学部統計学教室（編）東京大学出版会 978-4-13-042065-5

統計学
久保川 達也 （著） 東京大学出版会 978-4-13-062921-8

はじめての統計学
道家 暎幸（共著） コロナ社 978-4-339-06113-0

確率統計 新版 （新版数学シリーズ）
岡本 和夫 （ほか著） 実教出版 978-4-407-32171-5

統計学序論 改訂版
山本 義郎 （著） 東海大学出版部 978-4-486-02133-9

確率統計（高専テキストシリーズ）
上野 健爾（監修） 森北出版 978-4-627-05561-2

基本統計学 第４版
宮川 公男 （著） 有斐閣 978-4-641-16455-0

新統計入門
小寺 平治 （著） 裳華房 978-4-7853-1099-8

Schaum's Outline of Introduction to Probability and Statistics
Seymour Lipschutz （著） McGraw-Hill Education 978-0-07-176249-6

A Dictionary of Statistics
Graham Upton （著） Oxford Univ Pr 978-0-19-967918-8

www5e.biglobe.ne.jp/~emm386/statistics/